Une réflexion à partir de la Nature de Spinoza : ”La substance ou la Nature comme Treillis”.

Mohammed Bachir

Une réflexion à partir de la Nature de Spinoza : "La substance ou la Nature comme Treillis".

Par Mohammed Bachir en hommage à Baruch de Spinoza.

5 novembre 2017

Abstract : We propose a simple mathematical model based on two axioms and the set theory to approach the problem developed by the philosopher B. Spinoza in *the Ethics*. We then use the Knaster-Tarski Theorem to prove the existence and uniqueness of the Substance asserted by Spinoza.

Résumé : On propose un modèle mathématique simple basé sur deux axiomes et la théorie des ensembles pour approcher la problématique développée par le philosophe B. Spinoza, dans *l'Ethique*. On utilise ensuite le Théorème de Knaster-Tarski pour démontrer l'existence et l'unicité de la Substance affirmées par Spinoza.

Je tiens à remercier le Professeur Daniel Parrochia pour avoir lu et commenté une première version de cette note. Ces remarques et suggestions m'ont été d'une aide précieuse.

1 Introduction

Vers 1661, dans l'œuvre de *l'Ethique* (Voir [2]), Baruch de Spinoza commence par définir la notion de "*cause de soi*" et celle de "*substance*". Par "*cause de soi*" il entend, ce dont l'essence enveloppe l'existence, ou encore ce dont la Nature ne peut être conçue qu'existante. Par substance, ce qui est en soi et est conçu par soi, autrement dit, ce dont le concept n'a pas besoin du concept d'une autre chose pour être formé. Il affirme ensuite qu'il appartient à la nature de la substance d'exister (Voir les définitions I et II ainsi que la Proposition VII dans *l'Ethique* [2]). Le philosophe met en place sept axiomes sur lesquels il va s'appuyer tout le long de la première partie de l'œuvre pour démontrer (selon ce qu'il appelle lui même la méthode géométrique) l'existence et l'unicité d'une substance dans la Nature (Voir Proposition XI de *l'Ethique*). Autrement dit, de l'existence d'une unique chose dans la Nature qui est cause de soi. Cependant, Spinoza est amené a aborder la notion de substance via ses attributs. Le seul moyen pour lui de percevoir la substance par l'entendement. Quoique le raisonnement qu'on trouve dans *l'Ethique* soit souvent rigoureux et l'intuition profonde, certaines preuves présentent néanmoins quelques lacunes à certains endroits comme le démontre George Boole dans son œuvre "les lois de la pensée" (voir [1], voir aussi "*La raison systématique*" de Daniel Parrochia [6]). Ces difficultés s'expliquent à mon sens pour les raisons suivantes :

1. La première difficulté est due au fait qu'on ne peut raisonner sur la substance que par l'intermédiaire de ses attributs, ce qui peut induire des erreurs et des confusions.

2. la seconde difficulté est due à l'absence d'une théorie mathématique des ensembles au XVIIe siècle. Même si on trouve déjà dans l'argumentation de Spinoza une distinction entre deux types d'infini : "*l'infini en son genre*" et "*l'absolument infini*", la théorie des ensembles n'était pas encore constituée. Notons au passage que c'est à Georg Cantor que l'on doit, deux siècles plus tard vers 1874, les premières bases de la théorie des ensembles. Voici un passage de *l'Ethique* (Voir page 324 dans [2]) où Spinoza critique ses adversaires. On y voit clairement que la théorie des ensembles et la notion d'ordinal n'étaient pas encore au point mais que certains problèmes qu'on retrouvera plus tard constituaient déjà implicitement le fond des débats :

"*Si la substance corporelle, disent-ils, est infinie, qu'on la conçoive divisée en deux parties : chaque partie sera ou finie ou infinie. Si chaque partie est finie, l'infini se compose donc de deux parties finies, ce qui est absurde. Si chaque partie est infinie, il y a donc un infini deux fois plus grand qu'un autre infini, ce qui est également absurde. En outre, si une quantité infinie est mesurée en parties valant chacune un pied, elle devra consister en une infinité de telles parties ; et de même, si elle est mesurée en parties valant chacune un pouce ; par suite, un nombre infini sera douze fois plus grand qu'un autre nombre infini...*"

La présente note trouve sa source d'inspiration dans l'œuvre de *l'Ethique*. Ayant constaté que le raisonnement de Spinoza s'appuie en partie sur des concepts ensemblistes, je propose dans ce qui suit un modèle mathématique simple issu de la théorie des ensembles et basé sur deux axiomes concernant la loi de la causalité (en dehors des axiomes classiques de la théorie des ensembles) qui tente de développer une approche formelle de la problématique de Spinoza (Voir la Section 2 et la Section 4). Cependant, contrairement à Spinoza, j'appelle "*Nature*" N_t à un instant t, uniquement l'univers de toutes les choses A qui existent ou ayant existé avant l'instant t et qui ne coïncident pas avec leur propre cause (un principe fondamental de la physique). Je définis ensuite formellement E_t comme étant l'ensemble de toutes les choses existantes ou ont existé avant l'instant t, englobant ainsi éventuellement les choses qui coïncideraient avec leurs propres causes si toutefois ces choses là avaient été amenées à exister. Par ailleurs, une fois que les objets traités seront bien définis, la modélisation et les axiomes seront bien posés, les preuves seront purement mathématiques.

Évidemment, il est constant que N_t est une partie de E_t, pour tout instant t. La première question qui se pose alors est la suivante : Est-il vrai que $E_t = N_t$ ou bien N_t est strictement inclus dans E_t ? Je démontrerai en m'appuyant sur ces deux axiomes, qu'il existe nécessairement une unique chose non vide S dans E_t qui existe en soi. Autrement dit, il existe une unique chose qui est cause de soi, c'est-à-dire dont l'existence et la cause ne font qu'un. Il appartient donc à la nature de cette chose d'exister : C'est la Substance de Spinoza. Je prouverai par la même occasion que S est indépendante du temps et que pour tout instant t on a en fait $E_t = N_t \cup S$. Notons, que dans les Propositions XII et XIII de *l'Ethique*, Spinoza affirme que la substance est indivisible. Il sera aussi prouvé dans cette note que S est effectivement indivisible, c'est-à-dire qu'elle ne se décompose pas en deux (ou plusieurs) parties disjointes (Voir Théorème 1 en Section 4).

Il est à noter que la Substance S établie dans cette note, apparaît comme extérieur à la Nature N_t à chaque instant t, alors que chez Spinoza la notion de Nature doit plutôt coïncider avec E_t dans sa globalité à chaque instant t. Ces deux approches semblent, en apparence, se contredire mais en réalité elle peuvent différer uniquement dans la formulation. Ceci étant dit, le but de cette note n'est pas nécessairement de formaliser à l'identique la pensée de Spinoza, mais de proposer un modèle mathématique qui approche le mieux possible la pensée de l'auteur de *l'Ethique*. En effet, ce que j'appelle la substance ici, doit correspondre à la "Nature naturante" chez Spinoza. Quant à la "Nature naturée", elle n'est rien d'autre chez Spinoza que la modification de la substance par la nécessité de sa nature. A partir de là, si on considère E_t comme une structure globale, rien n'empêche qu'elle coïncide avec la "Nature naturée" de Spinoza. Il est juste à préciser, que E_t est considérée dans cette note uniquement d'un point de vu ensembliste sans structure globale. D'où la différence entre E_t à un instant t et un état primordial qui correspond à ce que j'ai appelé la substance S. Autrement dit, la cause de tout ce qui a existé avant hier n'est pas égal à tout ce qui a existé avant hier mais probablement inclus dans tout ce qui a existé avant l'an dernier. Alors qu'on montrera que la cause de S est égal à S. En d'autre terme, la "Nature naturante" est antérieur à la "Nature naturée". Il est à noter aussi que, contrairement à Spinoza qui cherche à connaitre la substance par son essence et ses attributs, on ne prétend pas dans cette note expliquer de quoi est faite la nature de cette substance. Il est uniquement question de prouver formellement et grâce à des outils mathématiques qu'elle existe et qu'elle est unique. L'idée est quelque peu similaire à l'exemple suivant : dans un langage fini (un dictionnaire par exemple) où l'on admet que tout mot possède une définition unique, il est alors nécessaire qu'il y ait au moins un mot qui est sa propre définition s'il l'on veut éviter de définir un premier mot par un deuxième et puis ce même deuxième par le premier, autrement dit si l'on veut éviter que la chaine des définitions fasse une boucle. En terme de causalité, il est admis de Spinoza et des physiciens classiques, que le temps n'est pas cyclique. En d'autres termes, le fait que l'effet ne précède jamais sa cause est un principe fondamental sur lequel repose toute la physique.

La preuve que j'apporterai reposera sur le théorème de Knaster-Tarski qui est un résultat mathématique de la théorie des points fixes dû aux mathématiciens, Knaster [5] (1928) et Tarski [7] (1955). Ce résultat est également attribué par Y. N. Moschovakis [4] à Zermelo. L'interêt de l'approche développée dans cette note, c'est qu'elle permet de revisiter *l'Ethique* de Spinoza via les mathématiques modernes que l'époque de Spinoza ignorait, tout en confirmant les thèses soutenues par ce dernier dans les Propositions XI, XII, XIII et XIV de *l'Ethique*.

Voici les deux premiers axiomes que je propose.

($A1$) Toute chose existante est l'effet d'une cause bien détérminée (toujours sous entendue non vide) et l'effet ne peut pas précéder sa cause. (Voir aussi les axiomes de *l'Ethique*).

Explication : C'est un principe fondamental de la physique.

($A2$) La cause du tout doit envelopper la cause de la partie. (Cet axiome ne se trouve pas explicitement dans *l'Ethique*).

Explication : Cet axiome dit que si une chose enveloppe une autre alors la cause de la première enveloppe la cause de la seconde. Lorsqu'une chose est considérée comme composée de plusieurs parties, sans chacune des parties le tout ne peut pas exister. Donc la cause d'une partie est contenue dans la cause du tout. Par exemple, la cause d'une page d'un livre fait partie de la cause du livre étant donné que sans ses pages, le livre ne peut exister.

Grâce aux deux axiomes ($A1$) et ($A2$) et une modélisation mathématique simple, on prouvera dans la Proposition 3 :

L'existence de la substance : *Il existe une substance S dans le monde de l'existant. Tout autre substance (si elle existe), contiendrait la substance S. Autrement dit, S est la plus petite substance contenue dans tout autre substance s'il y a plusieurs substances.*

Je rappelle à ce niveau que Spinoza énonce directement à partir de la définition d'une substance, la Proposition II de *l'Ethique* : *"Deux substances ayant des attributs différents n'ont rien en commun entre elles"*. Si on admet cette proposition comme étant intuitivement vraie, on en tire directement l'unicité de la substance. Car d'après ce que j'ai énoncé plus haut (ce qui sera prouvé ultérieurement), toute autre substance si jamais elle existait, contiendrait en elle la substance S qui existe nécessairement. Or si deux substances différentes ne doivent rien avoir en commun, sachant qu'elles ont toutes S en commun c'est qu'en fait, il n y a pas d'autre substance que S. Ainsi on aura fini avec l'existence et l'unicité de la substance S à partir uniquement des deux axiomes ($A1$) et ($A2$). Mais comme je n'ai pas défini une substance à partir de ses attributs, comme le fait Spinoza, mais uniquement comme étant une chose qui est cause de soi, je suggère à la place de la Proposition II de de *l'Ethique*, l'axiome équivalent suivant :

($A3$) Deux substances différentes n'ont rien en commun.

Explication : Comme le précise Spinoza dans sa démonstration de la Proposition II de l'Ethique, chacune, en effet, doit exister en soi et doit être conçue par soi, autrement dit le concept de l'une n'enveloppe pas le concept de l'autre.

Si on assume donc l'axiome ($A3$) en plus des axiomes ($A1$) et ($A2$), voici alors ce qu'on démontrera (voir Théorème 1) :

Unicité et indivisibilité de la substance : *Il existe une unique substance indivisible S dans le monde de l'existant.*

Notons qu'a partir de ce qu'on vient d'énoncer, on déduit le caractère infini de la substance et ceci découle immédiatement de la définition donnée par Spinoza, c'est-à-dire que la substance S n'est pas contenue dans une autre substance de même nature. C'est clairement le cas puisqu'il n'y a pas d'autre substance que S. Le fait que S enveloppe la *cause première* sera démontré dans le Corollaire 2, une fois qu'on s'accorde à définir la *cause première* comme étant la cause contenue dans toutes les autres causes.

La démarche qui sera suivit dans les prochaines sections se résume ainsi : En admettant les trois axiomes ($A1$), ($A2$) et ($A3$) ainsi qu'une modélisation mathématique, on partira du multiple c'est-à-dire de la diversité des êtres de l'existence, pour arriver via les mathématiques à l'Un et l'unique c'est-à-dire à la substance.

2 Une modélisation mathématique.

Commençons par modéliser le temps par la droite réelle notée $\mathbb{R}$.

2.1 Quelques notations et définitions.

Pour chaque instant $t \in \mathbb{R}$ arbitrairement fixé :

• on appelle cause d'une chose A, la chose qui a fait ou qui fait que A existe ou a existé.

• on dit qu'une chose a une cause en dehors d'elle même, si cette chose ne coïncide pas avec sa cause.

• on note N_t la Nature avant l'instant t, autrement dit l'ensemble de tous ce qui peut être considéré comme un "être" ou un "objet" ayant existé avant l'instant t et qui ne coïncide pas avec sa propre cause.

• on note E_t l'ensemble de tous ce qui peut être considéré comme un "être" ou un "objet" existant avant l'instant t. On a toujours $N_t \subset E_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par "chose", on désigne toute partie de E_t c'est-à-dire un sous-ensemble de E_t qui peut toutefois être un singleton.

• par $(\mathcal{P}(E_t), \subset)$ on désigne l'ensemble de toutes les parties de E_t muni de l'ordre de l'inclusion.

• on note $\mathcal{C}(A)$ la cause bien détérminée de A, pour tout $A \in \mathcal{P}(E_t)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{C}(A)$ peut dépendre de l'instant t, en revanche la loi de causalité $\mathcal{C}$ est supposée être immuable, autrement dit est indépendante du temps. La cause d'un élément $x \in E_t$ est tout simplement la cause de $\{x\} \in \mathcal{P}(E_t)$.

• on appelle substance toute partie $S \subset E_t$ $(t \in \mathbb{R})$ qui coïncideraient avec sa propre cause, c'est-à-dire $\mathcal{C}(S) = S$ si toutefois une telle chose existe.

• on note par E, le monde de l'existant c'est-à-dire $E = \cup_{t\in\mathbb{R}} E_t$.

• on note e la chose commune à tout ce qui existe. Autrement dit, la chose contenue dans toute autre chose de E_t pour tout $t \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire

$$e := \cap_{t\in\mathbb{R}} \cap_{A\subset E_t} A.$$

Cet ensemble e est appelé en mathématiques l'ensemble vide et est noté $\emptyset$ ou $\{\}$. Cependant, nous gardons pour l'instant la notation e au lieu de $\emptyset$, mais nous précisons que e a exactement les mêmes propriétés mathématiques que $\emptyset$. Notons juste que l'ensemble e c'est-à-dire l'ensemble vide, peut ici avoir deux interprétations équivalentes. La première désigne négativement "*l'absence de choses commune*" à ce qui existe dans E_t, d'où la notation de e par $\emptyset$. Mais la deuxième interprétation désigne positivement "*la diversité des êtres*" dans E_t. Dire que la chose commune e dans E_t est vide, autrement dit est inexistante, revient à dire que les êtres dans E_t sont divers. L'ensemble e aurait donc pu tout aussi bien être noté "d" comme diversité.

On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{P}(E_t), \subset)$ est un treillis complet (et même une algèbre de Boole complète) qui admet un plus petit élément $e = \emptyset$ et un plus grand élément E_t. L'introduction de l'ensemble $\mathcal{P}(E_t)$ se justifie par les passages suivant que l'on trouvera dans *l'Ethique* [2] pages 315-316 :

1. Que la vraie définition de chaque chose n'enveloppe et n'exprime rien à part la nature de la chose définie. D'où il suit :

2. Que nulle définition n'enveloppe et n'exprime aucun nombre déterminé d'individus, puisqu'elle n'exprime rien d'autre que la nature de la chose définie. Par *exemple, la définition du triangle n'exprime rien d'autre que la simple nature du triangle, mais non quelque nombre déterminé de triangles.*

3. Il faut noter que, de chaque chose existante, il est nécessairement donné quelque cause déterminée, par laquelle elle existe.

4. Il faut enfin noter que cette cause par laquelle certaine chose existe doit, ou bien être contenue dans la nature même et la définition de la chose existante (parce que, en effet, il appartient à sa nature d'exister), ou bien être donnée en dehors d'elle.

Cela posé, il suit que, s'il existe dans la Nature quelque nombre déterminé d'individus, une cause doit nécessairement être donnée pourquoi ces individus existent, et pourquoi ni un plus grand nombre ni un plus petit.

Ce dernier passage exprime le fait que les causes respectives de deux individus $\{a\}$ et $\{b\}$, n'enveloppent pas la cause de la paire d'individus $\{a, b\}$. Autrement dit, il est possible que $\mathcal{C}(\{a\}) \cup \mathcal{C}(\{b\}) \subset \mathcal{C}(\{a, b\})$ mais que $\mathcal{C}(\{a, b\}) \neq \mathcal{C}(\{a\}) \cup \mathcal{C}(\{b\})$. Il fallait donc prendre en considération l'ensemble des parties des êtres ou objets existants, ce qui a motivé l'introduction de $\mathcal{P}(E_t)$. Il faut aussi noter que si deux choses n'ont rien en commun entre elles, c'est qu'il y a une cause non vide et bien déterminée à cela. Ceci explique entre autre pourquoi la cause du vide ne peut pas être vide.

2.2 Traduction mathématique des deux premiers axiomes.

Commençons par traduire mathématiquement les axiomes $(A1)$ et $(A2)$.

$(A1)$ Toute chose existante est l'effet d'une cause bien déterminée (toujours sous-entendue non vide) et l'effet ne peut pas précéder sa cause. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $A \in \mathcal{P}(E_t)$, il existe une cause unique $\mathcal{C}(A) \in \mathcal{P}(E_t) \setminus \{\emptyset\}$. Cela signifie que la loi de causalité $\mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) \longrightarrow \mathcal{P}(E_t) \setminus \{\emptyset\}$ est une application, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$(A2)$ La cause du tout doit envelopper la cause de la partie. Cela signifie que pour deux choses existantes, si l'une enveloppe l'autre alors la cause de la première enveloppe la cause de la seconde. Autrement dit : pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E_t)$, si $A \subset B$ alors $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)$. Cela signifie que la loi de causalité $\mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) \longrightarrow \mathcal{P}(E_t)$ est croissante, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarquons qu'il est tout à fait possible d'unifier les deux axiomes $(A1)$ et $(A2)$ en un seul axiome de la manière suivante :

Un axiome unifié : Il existe une loi de causalité $\mathcal{C}$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, la loi $\mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) \longrightarrow \mathcal{P}(E_t) \setminus \{\emptyset\}$ est une application croissante pour l'ordre de l'inclusion.

C'est en fait cet axiome unifié qui est la clé de l'existence d'une substance non vide dans le monde de l'existant et ceci grâce au célèbre théorème de Knaster-Tarski comme nous le verrons plus loin.

2.3 Deux premières propositions fondamentales.

A) Le sens de l'ensemble e : Rappelons que l'ensemble contenu dans tout sous-ensembles non vide A de E_t pour tout $t \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$\emptyset = e := \cap_{t\in\mathbb{R}} \cap_{A\subset E_t} A,$$

et consiste en l'intersection de tous les sous ensembles non vides A de E_t ($t \in \mathbb{R}$), ce qui aboutit sur l'ensemble vide. Comme les êtres de E_t sont différents les uns des autres, dire par exemple que $e = \{x\} \cap \{y\}$ équivaut tout simplement à dire que $x \neq y$, pour tout $x, y \in E_t$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, évoquer l'ensemble vide e revient à faire référence à la diversité des êtres dans E_t. En effet, e n'a de sens ici que parce qu'il existe des êtres différents dans E_t. On peut donc dire que e autrement dit l'ensemble vide, exprime la diversité des êtres dans E_t pour tout $t \in \mathbb{R}$ ou encore que e est tout simplement l'**Existence** (quand on enlève tout ce qui existe en acte, il restera l'**Existence** en puissance. Autrement dit, l'"Existence" est la seule chose qui ne peut pas ne pas être). De ce fait, parler de la cause de e revient à parler de la cause de la diversité des êtres ou la cause de l'Existence : $\mathcal{C}(e) :=$ " La cause de la diversité des êtres de E_t pour $t \in \mathbb{R}$"= "La cause de l'Existence". Ceci semble en total accord avec la pensée de Spinoza, puisque ce dernier stipule que les essences des êtres sont éternelles (mais pas leur existences évidement), de ce fait, la diversité des êtres existant se manifesterait déjà dans leur éternelles essences. En conséquence, on a que $\mathcal{C}(e) \neq e$ vue qu'il doit exister par l'axiome ($A1$) une cause bien déterminée (sous entendu non vide) à cette diversité des êtres, puisque cette diversité est bien une réalité existante dans E_t pour chaque instant $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit, il doit exister une cause bien déterminée et non vide qui explique pourquoi il existe des choses différentes dans le monde de l'existant et non pas une unique chose. On obtient ainsi la première proposition.

Proposition 1. *On a que $\mathcal{C}(e) \neq e$ ou, ce qui revient au même $\mathcal{C}(\emptyset) \neq \emptyset$. Autrement dit, la cause de la diversité des êtres de E_t pour $t \in \mathbb{R}$, est non vide.*

L'explication du sens de cette proposition a été livré plus haut et sa démonstration repose comme je l'ai mentioné sur l'axiome ($A1$). On peut cependant en donner une autre démonstration de la manière suivante :

Démonstration 2. : De par la définition même de l'ensemble vide c'est qu'il est dépourvu de toute chose et donc dépourvu de toute cause. Ce qui est dépourvu de toute cause ne peut être une cause (même pas de lui même). $\square$

On peut aussi fournir une troisième démonstration, qui cette fois repose sur l'axiome VII de *l'Ethique* qui stipule que : *"tout ce qui peut être conçu comme non existant, son essence n'enveloppe pas l'existence"*. Autrement dit, tout ce qui peut être conçu comme non existant, ne peut être cause de soi. Or ici $e = \emptyset$ exprime le fait que ce qui est commun à toutes les choses de E_t ($t \in \mathbb{R}$) est inexistant. D'où $\mathcal{C}(e) \neq e$ par cet axiome VII de Spinoza. Notons encore une dernière fois, que l'ensemble vide $e = \emptyset$ prend sens dès qu'il existe au moins deux êtres différents dans E_t pour un certain instant $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, dire que la chose commune à tout ce qui existe est inexistante revient à dire que les choses existantes sont diverses dans leur ensemble et ceci doit avoir une cause bien déterminée et non vide qui l'explique.

B) La cause de la diversité est contenue dans toutes les causes. Sans trop m'attarder sur l'aporie de "l'Un et le multiple", je reprends ici la formule de Hegel sur l'identité :

"Aussi l'absolu lui-même est-il l'identité de l'identité et de la non-identité."

Autrement dit, ce qui fait qu'une chose est, c'est à la fois ce qu'elle est et ce qu'elle n'est pas. Cette formule trouve toute sa légitimité en terme de causalité en lien avec l'axiome ($A2$) proposé dans cette note. Partant de la formule de Hegel adaptée à la causalité, on peut expliquer philosophiquement ce qui se déduira mathématiquement de l'axiome ($A2$), c'est-à-dire, pourquoi la cause de la diversité ou la cause de l'Existence, autrement dit $\mathcal{C}(e)$, doit être contenue dans toutes les causes. En effet, pour qu'un être x soit différent d'un autre être y, il est nécessaire que la cause $\mathcal{C}(\{x\})$ qui précède x, contienne en elle la raison qui explique pourquoi x existera et pourquoi il sera différent de y. En d'autre terme, $\mathcal{C}(x \neq y) = \mathcal{C}(e = \{x\} \cap \{y\}) = \mathcal{C}(e)$ doit être contenu dans $\mathcal{C}(\{x\})$ et aussi dans $\mathcal{C}(\{y\})$. Donc, la cause de x c'est-à-dire $\mathcal{C}(\{x\})$, doit contenir en elle non seulement ce qui fera x mais aussi l'explication de ce que x ne sera pas. C'est uniquement ainsi qu'on peut expliquer pourquoi x existe et pourquoi il est différent des autres êtres. Ce raisonnement s'étend bien entendu à toute partie $A \neq \emptyset$ de E_t ($t \in \mathbb{R}$) qui n'est pas nécessairement un singleton. Ainsi, on obtient la proposition suivante dont la preuve mathématique repose tout simplement sur l'axiome ($A2$) :

Proposition 2. *Supposons que l'axiome* ($A2$) *est satisfait. Soit* $t \in \mathbb{R}$ *et* $A \in \mathcal{P}(E_t)$*. Alors,* $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(A)$*. Autrement dit, la cause de la diversité des êtres (c'est-à-dire la cause de* $e = \emptyset$*) est contenue dans toutes les causes.*

Démonstration. Partons de l'axiome ($A2$), comme $e \subset A$ pour tout $\emptyset \neq A \subset E_t$ ($t \in E_t$) et que la loi de causalité est croissante, alors $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(A)$.

□

3 Le théorème de Knaster-Tarski.

Le théorème de Knaster-Tarski, qu'on utilisera plus loin, est un résultat bien connu de la théorie des ensembles. Il concerne l'existence de points fixes pour une application croissante d'un treillis complet dans lui même. On donnera plus bas son énoncé ainsi qu'une démonstration. On commence par rappeler ci-dessous quelques notions bien connues concernant les treillis.

Treillis : Un treillis $(T, \leq)$ est la donnée d'un ensemble T et d'une relation notée $\leq$ (appelée ordre partiel) satisfaisant les propriétés suivantes :

(1) $\forall x \in T$, $x \leq x$.

(2) $\forall x, y \in T$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.

(3) $\forall x, y, z \in T$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

(4) pour tous éléments x et y de T, il existe une borne supérieure et une borne inférieure à l'ensemble $\{x, y\}$.

Treillis complet : Un treillis complet $(T, \leq)$ est un treillis pour lequel toute partie A de T admet une borne supérieure notée $\sup(A) \in T$ et une borne inférieure notée $\inf(A) \in T$. Autrement dit :

(i) $\forall a \in A$, $a \leq \sup(A)$ (respectivement $\inf(A) \leq a$),

(ii) s'il existe $M \in T$ tel que $\forall a \in A$, $a \leq M$ alors $\sup(A) \leq M$ (respectivement s'il existe $m \in T$ tel que $\forall a \in A$, $m \leq a$ alors $m \leq \inf(A)$)

Exemple : Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Alors $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis complet, où $\subset$ désigne l'inclusion.

On rappelle ci-dessous le théorème de Knaster-Tarski.

Lemme 1. (Knaster-Tarski) *Soit* $(B, \leq)$ *un Treillis complet et* $\mathcal{C} : B \to B$ *une application croissante pour l'ordre* $\leq$. *Alors, il existe respectivement un plus petit et un plus grand point fixe* $\omega, \theta \in B$, *autrement dit :*

$$\mathcal{C}(\omega) = \omega, \;\; \mathcal{C}(\theta) = \theta$$

et pour tout élément $\lambda \in B$ *tel que* $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda$ *on a*

$$\omega \leq \lambda \leq \theta.$$

Preuve : • **Le plus petit point fixe :** Posons $I := \{a \in B : \mathcal{C}(a) \leq a\}$. Comme B est un Treillis, il contient l'élément $\omega := \inf(I)$. Comme $\omega \leq a$ pour tout $a \in I$, la croissance de $\mathcal{C}$ entraîne que $\mathcal{C}(\omega) \subset \mathcal{C}(a)$ et comme $a \in I$ alors $\mathcal{C}(\omega) \leq a$ et ceci pour tout $a \in I$, il s'en suit que $\mathcal{C}(\omega) \leq \inf(I) = \omega$. On conclut que $\omega \in I$. Posons maintenant $\varpi := \mathcal{C}(\omega)$. On a donc $\varpi \leq \omega$. La croissance de $\mathcal{C}$ entraîne que $\mathcal{C}(\varpi) \leq \mathcal{C}(\omega) := \varpi$. D'où $\varpi \in I$. Puisque ω est le plus petit élément de I alors $\omega \leq \varpi$. Comme on avait déjà établi l'inégalité inverse alors $\varpi = \omega$ c'est-à-dire $\mathcal{C}(\omega) = \omega$. D'où l'existence d'un point fixe. Soit maintenant un élément $\lambda \in B$ tel

que $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda$. On a en particulier que $\lambda \in I$ et donc $\omega \leq \lambda$. L'élément ω est donc le plus petit point fixe de $\mathcal{C}$.
• **Le plus grand point fixe :** Soit maintenant $J := \{a \in B : a \leq \mathcal{C}(a)\}$. Comme B est un Treillis, il contient l'élément $\theta := \sup(J)$. Alors $a \leq \theta$ pour tout $a \in J$ et par la croissance de $\mathcal{C}$ on a $\mathcal{C}(a) \leq \mathcal{C}(\theta)$ et puisque $a \in J$ alors $a \leq \mathcal{C}(\theta)$ pour tout $a \in J$. D'où par passage à la réunion, $\theta \leq \mathcal{C}(\theta)$. Ainsi $\theta \in J$. En posant $\delta := \mathcal{C}(\theta)$ et en utilisant la croissance de $\mathcal{C}$, on montre comme plus haut que $\theta = \mathcal{C}(\theta)$. L'élément θ est le plus grand point fixe. En effet, soit λ tel que $\mathcal{C}(\lambda) = \lambda$. En particulier $\lambda \in J$ et donc $\lambda \leq \theta$.
• **Conclusion :** On a au final démontré que $\omega = \mathcal{C}(\omega) \leq \theta = \mathcal{C}(\theta)$ et tout autre point fixe λ vérifie $\omega \leq \lambda \leq \theta$.

□

Remarque 1. *Le théorème de Knaster-Tarski a une application au théorème de Cantor-Bernstein (voir [8]) qui est bien connue.*

4 Existence et unicité de la substance de Spinoza.

On énonce maintenant les résultats principaux de cette note, les propositions qui confirment les thèses proposées par Spinoza dans les Propositions XI, XII, XIII et XIV de *l'Ethique*. Par la proposition qui suit, on montre qu'il existe nécessairement une chose qui est cause de soi.

Proposition 3. *Supposons que les axiomes* $(A1)$ *et* $(A2)$ *sont satisfaits. Alors, il existe une substance* $S \subset \cap_{t \in \mathbb{R}} E_t$*, distincte de* e *i.e* $S \neq e$ *et contenant la cause de la diversité :*

$$\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(S) = S,$$

autrement dit S *est une substance ou encore, qu'il appartient à la nature de* S *d'exister. Tout autre substance* $\Lambda \subset E_t$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, contiendrait* S*, c'est-à-dire,* $S \subset \Lambda$*.*

Preuve : Grâce aux axiomes $(A1)$ et $(A2)$, on sait que la loi de causalité $\mathcal{C} : \mathcal{P}(E_t) \longrightarrow \mathcal{P}(E_t)$ est bien une application croissante, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\mathcal{P}(E_t)$ est un Treillis complet, il existe par le Lemme 1 un plus petit point fixe $S_t \in \mathcal{P}(E_t)$ i.e. telle que $\mathcal{C}(S_t) = S_t$ et un plus grand point fixe $D_t = \mathcal{C}(D_t)$. Tout autre point fixe $\Lambda \in \mathcal{P}(E_t)$ satisfait $S_t \subset \Lambda \subset D_t$.

Indépendance du temps de S_t *:* En effet pour $t \leq t'$, on sait que $E_t \subset E_{t'}$ et donc aussi que $\mathcal{P}(E_t) \subset \mathcal{P}(E_{t'})$. Comme on vient de le montrer, il existe un plus petit et un plus grand point fixe $S_t, D_t \in \mathcal{P}(E_t)$ ainsi qu'un plus petit et un plus grand point fixe $S_{t'}, D_{t'} \in \mathcal{P}(E_{t'})$. D'une part, comme $\mathcal{P}(E_t) \subset \mathcal{P}(E_{t'})$, on se trouve donc avec les points fixes $S_t, D_t, S_{t'}, D_{t'} \in \mathcal{P}(E_{t'})$. Ainsi, puisque $S_{t'}, D_{t'} \in \mathcal{P}(E_{t'})$ sont respectivement le plus petit et le plus grand point fixe on obtient que

$$S_{t'} \subset S_t \subset D_t \subset D_{t'}.$$

Il s'en suit que $S_{t'}$ existe aussi avant t i.e. $S_{t'} \in \mathcal{P}(E_t)$, puisque $S_{t'}$ est contenue dans $S_t \in \mathcal{P}(E_t)$. Or dans $\mathcal{P}(E_t)$, le plus petit point fixe étant S_t, tout autre point fixe de $\mathcal{P}(E_t)$ envelopperait S_t. Autrement dit on a aussi

$$S_t \subset S_{t'}.$$

Donc, $S_t = S_{t'}$. Ceci signifie que $S = S_t$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) est indépendante du temps. D'où, $S \subset \cap_{t\in\mathbb{R}} E_t$. Comme $e \subset S$ alors par la Proposition 2 (ou par l'axiome ($A2$)) on obtient $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(S) = S$ et par la Proposition 1 on a que $S \neq e$.

□

Comme je l'ai déjà mentioné dans l'introduction, on peut déduire directement l'unicité de la substance S à partir de la Proposition 3 si on admet (comme le fait Spinoza dans la Proposition II de *l'Ethique*) que deux substances différentes ne doivent rien avoir en commun (voir l'axiome ($A3$)), car effectivement chacune doit être cause de soi et exister par soi. D'où la proposition suivante.

Proposition 4. *Supposons que les axiomes* ($A1$)*,* ($A2$) *et* ($A3$) *sont satisfaits. Alors, il existe une unique substance S indépendante du temps et contenant la cause de la diversité. Autrement dit, il existe une unique substance S qui satisfait $\mathcal{C}(e) \subset S \subset \cap_{t\in\mathbb{R}} E_t$.*

Démonstration. L'existence d'une substance S telle que $\mathcal{C}(e) \subset S \subset \cap_{t\in\mathbb{R}} E_t$, est assurée par la Proposition 3. Soit $t \in \mathbb{R}$ quelconque et $\Lambda \subset E_t$ une substance. Il s'agit de voir que $\Lambda = S$. En effet, supposons par l'absurde que $\Lambda \neq S$. Par la même Proposition 3, on sait que $S \subset \Lambda$. Ainsi, les deux substances S et Λ ont toutes les deux S en commun. Or, ceci est exclu par l'axiome ($A3$), ce qui donne $\Lambda = S$. D'où l'unicité de la substance S.

□

Notons que autant la cause d'une chose A de E_t pour un instant $t \in \mathbb{R}$ peut très bien être contenue dans A (c'est-à-dire, il peut exister un A tel que $\mathcal{C}(A) \subset A$, par exemple on sait que $\mathcal{C}(E_t) \subset E_t$ pour tout instant t) autant l'inclusion inverse est impossible. Autrement dit, hormis l'ensemble vide qui est contenu dans tout autre ensemble et l'unique substance S qui est cause de soi, il ne peut exister d'ensemble $A \subset E_t$ ($t \in \mathbb{R}$) tel que $A \subsetneq \mathcal{C}(A)$. Ceci est dû à l'axiome ($A1$) qui interdit formellement à l'effet de précéder sa cause. D'où la proposition suivante :

Proposition 5. *Supposons l'axiome* ($A1$)*. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $A \in E_t$, on a*

$$A \subset \mathcal{C}(A) \Longrightarrow (A = e \text{ ou } A = \mathcal{C}(A)).$$

Démonstration. Par l'axiome ($A1$), un effet (sous entendu une chose non vide) ne peut pas précéder sa cause. Donc, seule une substance coïncide avec sa cause et l'ensemble vide $e = \emptyset$ est contenu dans toute chose. □

Definition 1. *En théorie des ensembles, un ensemble A est dit un atome, si $A \neq \emptyset$ et A n'a pas d'autre minorant que $\emptyset$ et lui même (c'est-à-dire que les seuls ensembles B vérifiant $B \subset A$ sont $\emptyset$ et A).*

On obtient la Proposition suivante :

Théorème 1. *Supposons que les axiomes (A1), (A2) et (A3) sont satisfaits. Alors, l'unique substance S est un atome (au sens de la définition 1) et on a que $S = \mathcal{C}(e)$.*

Démonstration. On sait que $e \subset \mathcal{C}(e)$. Par l'axiome ($A2$), c'est-à-dire par la croissance de la loi de causalité, on sais que $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(\mathcal{C}(e))$. Par la Proposition 5 on obtient que $\mathcal{C}(e) = e$ ou $\mathcal{C}(e)$ est une substance. Comme la Proposition 1 exclu le premier cas, on a alors que $S = \mathcal{C}(e)$ (car S est l'unique substance par Proposition 4). Pour voir que S est un atome, soit $A \subset S$ alors on sait que $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(S) = S$. D'où $\mathcal{C}(A) = S$. Il s'ensuit que $A \subset S = \mathcal{C}(A)$. Ceci entraine par la Proposition 5 que $A = e$ ou $A = S$, c'est-à-dire que S est un atome. □

Comme conséquence de la Proposition 1, l'indivisibilité de la substance au sens de Spinoza devient limpide :

Corollaire 1. *L'unique substance S est indivisible.*

Démonstration. Par Théorème 1, la substance S est un atome et donc indivisible. □

Definition 2. *On appellera "cause première", la cause contenue dans toutes les causes. On dit d'une chose A qu'elle est "éternelle" si et seulement si $A \subset E_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ou ce qui revient en même, $A \subset \cap_{t \in \mathbb{R}} E_t$.*

Corollaire 2. *La substance S est la cause première de toute autre chose et elle est éternelle.*

Démonstration. Soit une chose $A \subset E_t$ pour $t \in \mathbb{R}$. Par la Proposition 2, on a $\mathcal{C}(e) \subset \mathcal{C}(A)$. Donc, $\mathcal{C}(e)$ est la cause première qui n'est rien d'autre que la substance S d'après la Théorème 1. Par ailleurs, S est cause de soi et est indépendante du temps par la Proposition 4, elle est donc éternelle. □

En suivant la définition II de *l'Ethique* ci-dessous, on déduit aisément l'infinité de la substance S.

Definition 3. *Une chose est dite finie en son genre quand elle peut être bornée par une autre chose de même nature. Par exemple, un corps est dit chose finie, parce que nous concevons toujours un corps plus grand ; de même, une pensée est bornée par une autre pensée ; mais le corps n'est pas borné par la pensée, ni la pensée par le corps.*

Corollaire 3. *L'unique substance S est nécessairement infinie.*

Démonstration. Cela découle de la définition ci-dessus puisqu'il n'y a pas d'autre sustance de même nature que S pour la contenir. $\square$

5 Conclusion.

Comme je l'ai mentionné à la fin de l'introduction, la démarche qui a été suivie dans cette note consistait en le fait de partir de la diversité des êtres pour aboutir, via un modèle mathématique, à l'unicité de la substance. Il a été prouvé par ailleurs que la substance est indivisible, infinie, éternelle et qu'elle est cause première de toute chose. Il serait donc bien intéressant maintenant de faire le chemin inverse, c'est-à-dire, de partir de la substance elle-même dont on a prouvé l'existence et l'unicité pour comprendre dans quelle mesure le modèle proposé ici permet d'expliquer le cheminement causal qui part de cette substance et aboutit à la diversité des êtres. Ceci permettrait sans doute de voir si la suite des affirmations de Spinoza dans *l'Ethique* reste valide. Mais cette tâche n'a pas été abordée dans cette note pour éviter toute spéculation non mathématique. Notons juste que le formalisme mathématique qui a été utilisé ici est possible dans un cadre plus général. En effet, dès que l'on suppose qu'il existe un ordre $\leq$ sur le monde de l'existant E faisant de ce dernier un treillis complet et qu'il existe une loi de causalité de $\mathcal{C} : (E, \leq) \longrightarrow (E, \leq)$ qui soit croissante pour cet ordre, alors grâce au théorème de Knaster-Tarski, il existe nécessairement une substance dans E et même que l'ensemble des substances est lui même un treillis complet. L'unicité de la substance s'obtient ensuite en rajoutant l'axiome suivant : *"deux substances différentes ne sont pas comparables"*. Cela laisse donc la voie libre à d'autre modèle possible. Ceci étant dit, j'ai choisi de garder ici le modèle simple qu'est $(\mathcal{P}(E_t), \subset)$ car ce dernier ma semblé être le plus adéquat et le plus concret à l'heure actuelle.

Je vais m'arrêter sur cette conclusion que les premières affirmations de Spinoza trouvées dans *l'Ethique* (je parle uniquement de ce que j'ai abordé ici) ont été confirmées et démontrées dans cette note par une approche rigoureusement mathématique. On peut donc probablement encore dire comme l'a affirmé Antonio Damasion dans l'un de ses livres (voir [3]) que : Spinoza avait raison.

6 Appendice : Tableaux de l'Ethique I.

Ci-dessous quelques Propositions de l'Ethique I et leur équivalents dans la présente note.

1. Proposition II de l'Ethique $\Leftrightarrow$ Axiome $(A3)$ dans le présent manuscrit
2. Proposition VIII de l'Ethique $\Leftrightarrow$ Corollaire 3 dans le présent manuscrit

3. Proposition XI de l'Ethique $\Leftrightarrow$ Proposition 3 dans le présent manuscrit
4. Proposition XIII de l'Ethique $\Leftrightarrow$ Corollaire 1 dans le présent manuscrit
5. Proposition XIV de l'Ethique $\Leftrightarrow$ Théorème 1 dans le présent manuscrit
6. Proposition XV et Proposition XIX de l'Ethique $\Leftrightarrow$ Corollaire 2 dans le présent manuscrit

Références

[1] G. Boole, *Les Lois de la pensée*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, coll. " Mathesis ", 1992 (ISBN 978-2-7116-1062-4, présentation en ligne [archive])

[2] R. Caillois, M. Francès et R. Misrahi, *Oeuvres Complètes* (B. Spinoza), Gallimard, (1984).

[3] A. R. Damasio *Spinoza avait raison. Joie et tristesse, le cerveau des émotions* Odile Jacob (2003).

[4] Y. N. Moschovakis, *Notes on Set Theory*, Springer, (1994)

[5] B. Knaster. *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, Ann. Soc. Polon. Math. 6 (1928), 133-134.

[6] D. Parrochia, *La raison systématique : Essais de morphologie des systèmes philosophiques*, Librairie philosophique J. Vrin | Mathesis (2000).

[7] A. Tarski. *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific Journal of Mathematics 5 (1955), 285-309.

[8] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème-de-Cantor-Bernstein